Milí studenti,

tyto učební materiály vznikají průběžně v době zákazu vaší osobní přítomnosti ve škole. Jejich smyslem je umožnit vám studovat i přesto, že nebudete smět být přítomni na hodinách. Čtěte je jako knihu – od začátku do konce, výkladové partie s porozuměním, ideálně s přepisováním základních poznámek do sešitů, příklady postupně řešte a jejich řešení pište i s postupy běžně do sešitů. Tentokrát ovšem, prosím, posílejte fotografie/skeny řešení elektronicky, e-mailem, na hnyk@gybroumov.cz. Deadline pro nastudování a odevzdání řešení bude vždy poslední den rozmezí uvedeného v hlavičce materiálu (v tomto případě 22. 3. 2020).

Elipsa

Posud jsme zvládli odvodit z definice středovou rovnici elipsy se středem v počátku soustavy souřadnic s tímto výsledkem:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}$$

Tuto rovnici můžeme již známým způsobem upravit do obecného tvaru – jednoduše se zbavíme zlomků a zajistíme, aby na pravé straně zůstala pouze nula. Snadno dojdeme k rovnici:

$$\boxed{b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2=0}$$

Co se však stane, když střed elipsy posuneme mimo počátek soustavy souřadnic? Mohli bychom samozřejmě provést obdobné odvození, které by započalo u myšlenky, že „Elipsa, to je množina bodů, u nichž je součet vzdáleností od dvou pevně daných ohnisek konstantní.“ – jenže tentokrát by odvození bylo technicky ještě komplikovanější, protože pod odmocninami by se nám objevily další členy kvůli rozdílům v y-ových souřadnicích. Laskavý čtenář tedy jistě promine (nebo za jedničku provede odvození samostatně ☺) a přijme středovou rovnici elipsy se středem S=[m;n]:

$$\boxed{\frac{(x-m)^2}{a^2}+\frac{(y-n)^2}{b^2}=1}$$

Vaším prvním úkolem je převést tuto rovnici do obecného tvaru a řádně roznásobit závorky a srovnat členy. Řešení (i s postupem!) nafoťte/naskenujte a zašlete mi jej e-mailem.

Znalost tohoto souboru rovnic nám umožní jednak popsat libovolně umístěnou elipsu (pozor – stále platí podmínka, že osy elipsy musejí být rovnoběžné s osami souřadnic; i „pootočenou“ elipsu lze rovnicemi popsat, nicméně to již přesahuje rámec středoškolského učiva), a jednak přečíst některé význačné parametry elipsy ze zadané rovnice. Pojďme tedy postupně vyzkoušet obojí.

Vaším dalším úkolem bude vytvořit středové a obecné rovnice pro zadané elipsy. Řešení nafoťte/naskenujte a zašlete mi jej e-mailem.

1) $S=[0;0]; a=4; b=3$
2) $S=[2;7]; a=3; b=1$
3) $S=[-3;4]; a=6; b=2$
4) $S=[5;-7]; e=5; b=2$
5) $S=[-4;-6]; a=11; e=8$
6) $S=[-1;-1]; F=[-5;-1]; b=8$
7) $F=[-9;0]; G=[3;0]; b=2$
8) $F=[11;5]; G=[25;5]; a=10$
9) $F=[-7;-3]; e=6; a=10$

Dalším úkolem bude opačný postup – ze zadané rovnice vyčtěte souřadnice středu, ohnisek, délky hlavní a vedlejší poloosy, excentricitu a souřadnice krajních bodů elipsy (nejvýše, nejníže, nejvíce vlevo a nejvíce vpravo položený bod). Řešení opět nafoťte/naskenujte a zašlete mi jej e-mailem.

1) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$ 2) $\frac{x^2}{81}+y^2=1$ 3) $\frac{(x-5)^2}{4}+\frac{y^2-2y+1}{64}=1$

4) $\frac{(x+7)^2}{16}+\frac{(y-2)^2}{49}=1$ 5) $\frac{x^2}{20}+\frac{(y+8)^2}{4}=1$ 6) $\frac{\left(x+\frac{5}{3}\right)^2}{9}+\frac{(y-1)^2}{121}=1$

7) $9x^2+16y^2-144=0$ 8) $4x^2+y^2-8x+4y+4=0$ 9) $25x^2+16y^2-100x+32y+115=0$

Než se pustíme do bádání nad dalšími druhy kuželoseček, pojďme ještě spočítat několik příkladů na téma vzájemné polohy přímky a kuželosečky. Postup je analogický vyšetřování vzájemné polohy dvou přímek – začínáme u soustavy dvou rovnic a hledáme její řešení. Pakliže řešení nemá, přímky nemají společné body; pakliže má jedno řešení, přímky mají jediný průsečík; pakliže řešení existuje nekonečně mnoho, přímky jsou totožné. V případě kuželosečky a přímky se liší jen poslední možnost – např. vzhledem ke kružnici může přímka běžet zcela mimo (neexistuje řešení), může jí být tečnou (jedno řešení), nebo sečnou (dvě řešení). Tyto možnosti jsou důsledkem skutečnosti, že v případě přímky a kuželosečky bude jedna rovnice ze soustavy vždy kvadratická (v jedné či obou proměnných).

Prozatím se omezíme na kružnici a přímku. Ať už jsou výchozí objekty zadány jakýmkoli způsobem, naším cílem bude vždy nalézt jejich obecné rovnice – jejich soustavu potom stačí vyřešit. S výhodou můžeme využít dosazovací metody, kdy vyjádříme jednu z neznámých z rovnice přímky a dosadíme ji do rovnice kuželosečky. Tím získáme kvadratickou rovnici s jedinou neznámou. Řešení nám buď ukáže polohu (polohy) průsečíku (průsečíků), nebo z něj vyplyne, že objekty průsečík nemají.

Vaším posledním úkolem v tomto bloku tedy bude vyšetřit vzájemnou polohu přímky a kružnice. Pokud mají společné body, nalezněte jejich souřadnice. Řešení opět nafoťte/naskenujte a zašlete mi jej e-mailem.

1) $p: A=[5;-1]; B=[-3;-7]$
$k: x^2+y^2-4x-6y-12=0$

2) $p: -5x+y+5=0$
$k: x^2+y^2+16x-12y+64=0$

3) $p: 2x-y=0$
$k: x^2+y^2-3x+2y-3=0$

4) $p: A=[-1;3]; B=[0;2]$
$k: x^2+y^2-x+9=0$

5) $p: 2x-y-6=0$
$k: x^2+y^2-4x-5y-1=0$

6) $p: x=-t$
$\quad y=2+2t \quad ; t\in R$
$k: x^2+y^2+4x+6y+9=0$