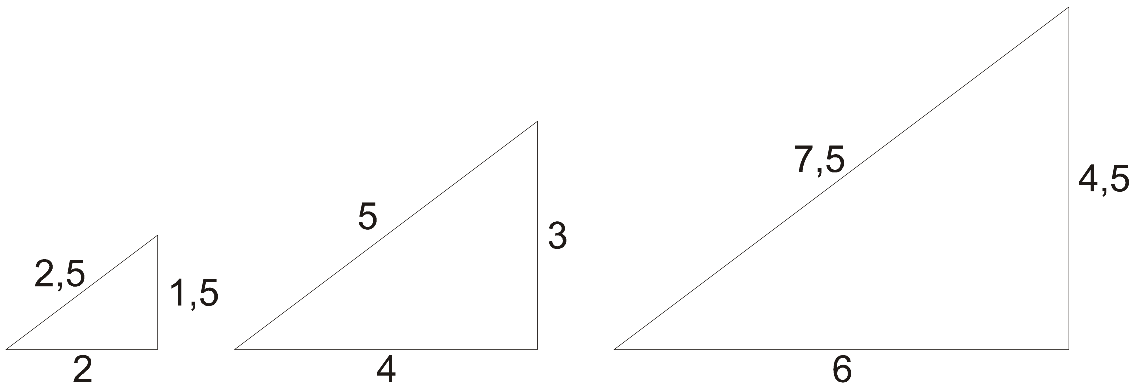
Milí studenti,

tyto učební materiály vznikají průběžně v době zákazu vaší osobní přítomnosti ve škole. Jejich smyslem je umožnit vám studovat i přesto, že nebudete smět být přítomni na hodinách. Čtěte je jako knihu – od začátku do konce, výkladové partie s porozuměním, ideálně s přepisováním základních poznámek do sešitů, příklady postupně řešte a jejich řešení pište i s postupy běžně do sešitů. Tentokrát ovšem, prosím, posílejte fotografie/skeny řešení elektronicky, e-mailem, na hnyk@gybroumov.cz. Deadline pro nastudování a odevzdání řešení bude vždy poslední den rozmezí uvedeného v hlavičce materiálu (v tomto případě 22. 3. 2020).

Funkce úhlu

Při bádání nad podobností útvarů jsme si říkali, že jakkoli složitý útvar si nakonec rozložíme na útvary nejjednodušší možné – na trojúhelníky – a budeme poté studovat jejich podobnosti. Víme také již, podle jakých znaků poznáme, že dva trojúhelníky jsou si podobné; nadto umíme určit koeficient jejich podobnosti. Pojďme si však povšimnout, jak je to s podobnostmi u toho druhu trojúhelníků, který máme zatím prozkoumaný nejlépe – u těch pravoúhlých.

Z definice mají všechny pravoúhlé trojúhelníky jeden vnitřní úhel pravý. Co tedy musí být splněno, aby si dva pravoúhlé trojúhelníky byly podobné? Bystrý čtenář jistě bez námahy odpoví: „Jeden další vnitřní úhel musí mít stejnou velikost v obou trojúhelnících!“ To je ovšem nesmírně zajímavý poznatek – prohlédněte si nyní Obr. 1.



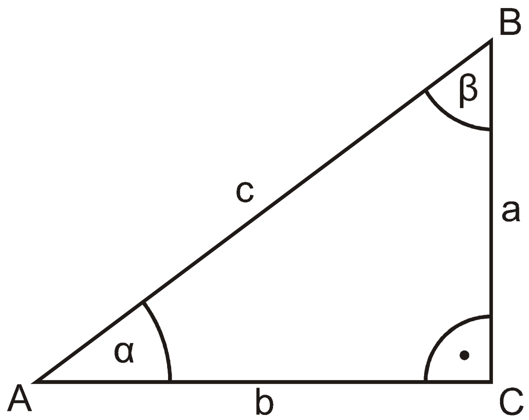
Obr. 1 – Podobné pravoúhlé trojúhelníky

Fakt, že jsou si trojúhelníky podobné, si můžeme snadno ověřit – poměr podobnosti mezi prostředním a levým trojúhelníkem na Obr. 1 je k=2 – délka každé odpovídající strany je dvojnásobkem délky strany levého trojúhelníku. Mezi pravým a prostředním trojúhelníkem potom odhalíme poměr k=1,5. A konečně, mezi dvěma krajními trojúhelníky snadno určíme poměr k=3.

Zajímavější ovšem je povšimnout si, že zachovány díky podobnostem zůstávají i poměry mezi délkami stran jednotlivých trojúhelníků – porovnejme třeba poměry mezi vodorovnou odvěsnou a přeponou: U prvního trojúhelníku 2:2,5, u druhého 4:5 a u třetího 6:7,5. Když poměry vhodně rozšíříme – první šestkou, druhý trojkou a třetí dvojkou, zjistíme, že jsou si všechny rovny – 12:15. Jestliže ovšem tento poměr nezávisí na velikosti trojúhelníku, na čem tedy?

Odpověď je již v názvu této kapitolky – tento poměr závisí na velikosti vnitřních úhlů v trojúhelníku – konkrétně tedy úhlů u přepony, protože úhel proti přeponě je vždy pravý. Takovému stavu – když jedna veličina závisí na druhé – říkáme **funkce**. Můžeme tedy říkat, že poměr stran v pravoúhlém trojúhelníku je **funkcí úhlu**. Máme tím na mysli, že se změnou velikosti úhlu se bude měnit i poměr délek stran. A jak se mění?

Nejprve si zavedeme společné značení, abychom měli jednodušší domluvu. Když budeme hovořit o „standardně pojmenovaném pravoúhlém trojúhelníku“, budeme mít na mysli trojúhelník z Obr. 2.



Obr. 2 – Standardně pojmenovaný pravoúhlý trojúhelník

Tento trojúhelník má tři **vrcholy** A, B, C; tři **strany** délek a, b, c; tři **vnitřní úhly** o velikostech α, β a 90°; nejdelší stranu nazýváme **přepona**, dvě kratší strany potom **odvěsny**. Stranu a nazýváme **protilehlou** vzhledem k úhlu α a **přilehlou** vzhledem k úhlu β; analogicky stranu b nazýváme protilehlou vzhledem k úhlu β a přilehlou vzhledem k úhlu α.

Pojďme nyní prozkoumat, jak vypadají závislosti některých vybraných poměrů délek stran na velikostech některých vybraných úhlů. Vaším úkolem bude narýsovat osm pravoúhlých trojúhelníků s odvěsnou b délky 5 cm a úhlem α o velikosti postupně 10°, 20°, …, 80°. S pomocí pravítka/měřítka a jednoduché úvahy potom doplňte následující tabulku Tab. 1. Vyplněné tabulky nafoťte/naskenujte a pošlete mi je na e-mail. Poměry stran vždy určujte s přesností na dvě desetinná místa. Nápověda pro úvahy: Zkuste si představit, že úhel α zmenšujete až téměř k nule či zvětšujete až téměř k 90° a přijďte na to, jaké by byly délky stran a, c. Z nich potom určete poměry.

Tab. 1 – Výsledky měření

Úhel	Délky stran			Poměry délek stran jako desetinné číslo			
α [°]	a [mm]	b [mm]	c [mm]	a:c	b:c	a:b	b:a
0		50					
10		50					
20		50					
30		50					
40		50					
50		50					
60		50					
70		50					
80		50					
90		50					

Vaším dalším úkolem bude sestrojit čtyři grafy – pro každý poměr z tabulky Tab. 1 jeden. Na vodorovnou osu zaneste velikost úhlu α ve stupních, na svislou osu potom zaneste daný poměr (do prvního grafu a:c, do druhého b:c atd.) – nezapomeňte zvolit vhodné měřítko (grafy by měly mít velikost alespoň 10x10 cm)! Do každého grafu nejprve zaneste desítku bodů z tabulky. Zanesené body potom **od ruky** proložte **hladkou čarou**. Výsledné grafy opět nafoťte/naskenujte a zašlete mi je e-mailem.

Pokud jste zpracovali předchozí úkoly dříve, než jste pokročili ve čtení až sem, vězte, že jste si právě postupně vytvořili grafy funkcí **sinus** (sin), **kosinus** (cos), **tangens** (tg) a **kotangens** (cotg) pro ostré úhly. Tyto názvy jste již možná někdy slyšeli nebo je četli – minimálně třeba na kalkulátorech jste jejich zkratky již bezesporu objevili. Nyní již znáte jejich význam – vzhledem k úhlu α:

- Poměr a:c, tedy poměr strany protilehlé ku přeponě, nazýváme sinus α (sin α).
- Poměr b:c, tedy poměr strany přilehlé ku přeponě, nazýváme kosinus α (cos α).
- Poměr a:b, tedy poměr strany protilehlé ku straně přilehlé, nazýváme tangens α (tg α).
- Poměr b:a, tedy poměr strany přilehlé ku straně protilehlé, nazýváme kotangens α (cotg α).

Ve standardně pojmenovaném pravoúhlém trojúhelníku tedy můžeme psát:

$$\boxed{\sin\alpha = \frac{a}{c}};\ \boxed{\cos\alpha = \frac{b}{c}};\ \boxed{\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{a}{b}};\ \boxed{\mathrm{cotg}\,\alpha = \frac{b}{a}}$$

Nyní tedy známe matematická označení jednotlivých poměrů – jenže k čemu nám budou dobré? Zamysleme se, co jsme zatím dokázali počítat v pravoúhlém trojúhelníku. Dokázali jsme určit délku zbývající strany, když jsme znali délky libovolných dvou stran – pomocí Pythagorovy věty. A to je tak všechno. Uvědomme si, že nyní máme v rukou velmi silný nástroj, který nám při znalosti délek dvou stran umožňuje v trojúhelníku určit velikosti všech vnitřních úhlů i délku zbývající strany. Ba dokonce, stačí nám znát délku jediné strany a velikost jednoho vnitřního úhlu (samozřejmě mimo toho pravého) a dokážeme „řešit“ celý trojúhelník – to znamená určit délky všech stran a velikosti všech vnitřních úhlů. Postupně si ukážeme, jak tyto úlohy řešit, ale než se do toho pustíme, pojďme se ještě trochu lépe sžít s **goniometrickými funkcemi** – to jsou ony funkce úhlu, sin, cos, tg a cotg, které jsme si představili v minulých řádcích (slovo „goniometrie“ je složeninou řeckých slov „gōnia“ – úhel a „metron“ - měřit).

Hodnoty goniometrických funkcí lze určovat několika způsoby – pomocí kalkulátoru, z tabulek, nebo za užití některých šikovných triků i jen s tužkou a papírem. Postupně si ukážeme všechny jmenované způsoby, začneme však tím nejpohodlnějším – kalkulátorem. Vaším dalším úkolem bude použít grafy, které jste pečlivě narýsovali v předchozím úkolu, a odečíst z nich hodnoty goniometrických funkcí pro úhly zadané v Tab. 2. Potom své závěry ověřte na kalkulačce. Vyplněnou tabulku opět nafoťte/naskenujte a pošlete mi ji na e-mail.

Tab. 2 – Odečtené a vypočtené hodnoty goniometrických funkcí

	Odečteno z grafů				Vypočteno kalkulátorem			
α [°]	sin α	cos α	tg α	cotg α	sin α	cos α	tg α	cotg α
5								
25								
42								
56								
68								
83								

Nápověda k zadávání do kalkulátoru: Nejprve se přesvědčte, že Váš kalkulátor je v módu stupňů (DEG). Pokud není, nalezněte způsob, jak ho tam přepnout (někdy pomocí tlačítka MODE + nějakého čísla, jindy pomocí tlačítka „DRG" apod. – konzultujte návod ke kalkulátoru, Google, nebo se mi ozvěte a pošlete foto kalkulačky). Potom jsou obvykle dva druhy strojů – jedny s **postupným zadáváním** (obvykle jednořádkový digitální displej), druhé se **syntaktickým zadáváním** (obvykle dvou a více řádkový displej, s možností zadávat závorky, písmenka apod.).

- Pro kalkulátory s postupným zadáváním nejprve zadejte úhel ve stupních, poté zmáčkněte tlačítko příslušné funkce (sin/cos/tan). Výsledkem je příslušný poměr stran.
- Pro kalkulátory se syntaktickým zadáváním nejprve zmáčknete tlačítko příslušné funkce (sin/cos/tan), poté zadáte úhel ve stupních, stlačíte tlačítko pravé závorky (levá se obvykle napíše automaticky se zadáním funkce), abyste ji uzavřeli, a „=" pro výsledek.

<u>Opačný postup – od poměru stran k úhlu</u>

V tuto chvíli by mohla zaznít zcela přirozená otázka – jde to i naopak? Tedy, lze zjistit velikost úhlu, když znám poměr příslušných stran? Vnímavý student jistě odpoví, že to samozřejmě možné je – máme přece sestrojené grafy! Z nich lze odečíst nejen příslušný poměr stran pro zadaný úhel, ale mohu naopak odečíst příslušný úhel pro zadaný poměr stran. A když to umíme my díky grafu, bezesporu takové údaje nalezneme i v tabulkách (v těch samých – jen tentokrát budeme vyhledávat v pravém sloupci a zapisovat si hodnoty z toho levého, zatímco v předchozím případě tomu bylo naopak), nebo k jejich výpočtu přimějeme kalkulátor. Pojďme si opět povědět, jak na to:

- Pro kalkulátory s postupným zadáváním nejprve zadejte úhel ve stupních, poté zmáčkněte **Shift** či **2ndf** a nakonec zmáčkněte tlačítko příslušné funkce (sin/cos/tan). Výsledkem je příslušný úhel. Povšimněte si, že nad tlačítky goniometrických funkcí (sin/cos/tan) jsou obvykle menším písmem nápisy ($\sin^{-1}/\cos^{-1}/\tan^{-1}$) – o jejich významu se dočtete níže.
- Pro kalkulátory se syntaktickým zadáváním nejprve zmáčknete tlačítko **Shift** či **2ndf**, poté tlačítko příslušné funkce (sin/cos/tan), zadejte úhel ve stupních, stlačíte tlačítko pravé závorky (levá se obvykle napíše automaticky se zadáním funkce), abyste ji uzavřeli, a „=" pro výsledek. Povšimněte si, že nad tlačítky goniometrických funkcí (sin/cos/tan) jsou obvykle menším písmem nápisy ($\sin^{-1}/\cos^{-1}/\tan^{-1}$) – o jejich významu se dočtete níže.

A proč že jsou na kalkulátorech ty maličké nápisy nad jednotlivými tlačítky? To jsou ony „další funkce" tlačítek. Kalkulátor totiž má velké spousty funkcí, ale z rozměrových důvodů nemůže mít tak velké spousty tlačíte. Proto má většina z nich dvě i více funkcí. Třeba tlačítko „sin", jehož základní funkcí je říci kalkulačce, že má počítat sinus nějakého úhlu, má druhou funkci „$\sin^{-1}$", jejímž smyslem je naopak říci kalkulačce, že uživatel chce zjistit, jakému úhlu je příslušný zadaný poměr stran.

V případě goniometrických funkcí je ovšem zápis na většině kalkulátorů nešťastný – to, co od dotyčného tlačítka chceme, je „opak goniometrické funkce", nikoli „mínus první mocnina goniometrické funkce", jak by naznačoval nápis „$\sin^{-1}$". Ve skutečnosti jde o tzv. **inverzní funkci**, tedy funkci, která dělá přesný opak než funkce původní – pro příklad: je-li $f(x):\ y=2x-1$, pak inverzní funkce je $f_{-1}(x):\ y=\frac{x+1}{2}$. Jakto? Zkuste si dosadit y z původní funkce do té inverzní: $f_{-1}(f(x)):\ y=\frac{(2x-1)+1}{2}=x$. Čeho jsme tady byli svědky? První funkce udělala z našeho čísla „x" jiné číslo „2x-1" (třeba udělala z cihel dům). Inverzní funkce vzala výsledek její práce – tedy číslo „2x-1" a udělala z něj zase zpátky původní číslo „x" (třeba udělala z domu zpět cihly). Dělá tedy „přesný opak" než původní funkce. Stejné je to s funkcemi „sin" (dělá z úhlu poměr) a „$\sin^{-1}$" (dělá z poměru úhel). Jenže na kalkulačkách bývá ona „-1" v horním indexu, což je v matematice pozice pro **exponent**, tedy mocninu. Správnější zápis je použit o pár řádků výše – „-1" je v dolním indexu – zde pak „-1" opravdu znamená inverzní funkci. Ale úplně nejlepší by bylo prozradit si, jak se nazývají funkce inverzní ke goniometrickým – ty se totiž nazývají **cyklometrické funkce** a jmenují se:

- arkus sinus (arcsin) – inverzní k sinu (sin)
- arkus kosinus (arccos) – inverzní ke kosinu (cos)
- arkus tangens (arctg) – inverzní k tangens (tg)
- arkus kotangens (arccotg) – inverzní ke kotangens (cotg).

Je-li tedy např. $\sin 30° = 0{,}5$, pak $\arcsin 0{,}5 = 30°$. V posledním úkolu této kapitolky si tedy vyzkoušejte práci s kalkulátorem i naopak – zjistěte, pro jaký úhel platí:

1) $\sin\alpha = 0{,}7$, $\alpha = ?$

2) $\cos\alpha = 0{,}2$, $\alpha = ?$

3) $tg\alpha = 1$, $\alpha = ?$

4) $\cot g\alpha = 0{,}4$, $\alpha = ?$

5) $\sin\alpha = 0{,}32$, $\alpha = ?$

6) $\cos\alpha = 0{,}67$, $\alpha = ?$

7) $tg\alpha = 0{,}82$, $\alpha = ?$

8) $\cot g\alpha = 0{,}91$, $\alpha = ?$

Výsledky příkladů opět nafoťte/naskenujte a zašlete mi je e-mailem.