Gymnázium, Broumov, Hradební 218

Třída: Sbor seniorů | Datum konání: 8. 11. 2018

Vypracoval: Michal Hnyk | Datum odevzdání: 4. 12. 2018

Spolupracoval: Mé silou přinucené horší já

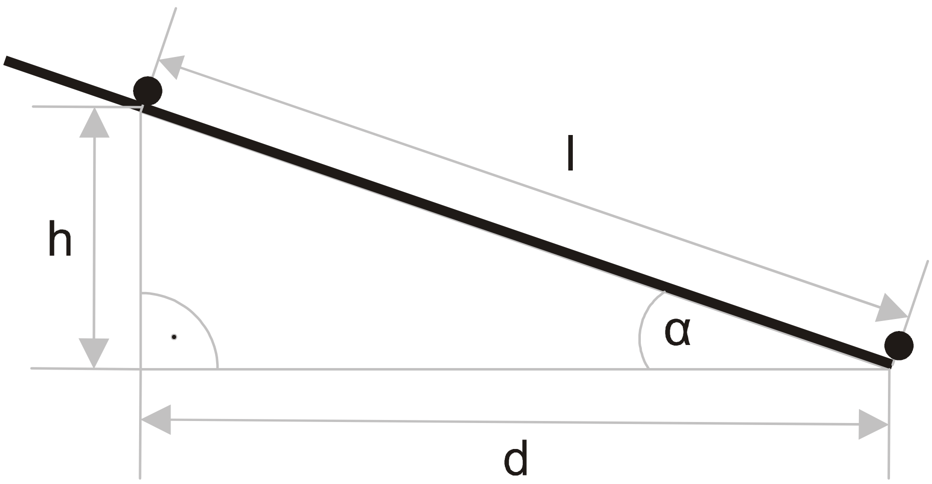
Laboratorní práce č. 3

Téma: **Nakloněná rovina**

Úkol: **1)** Určete průměr použité kuličky. Měření opakujte alespoň desetkrát.
2) Určete závislost času jízdy kuličky po nakloněné rovině na úhlu jejího sklonu $t(\alpha)$ (pro LP1 $l(t)$, pro LP3 $t(l)$). Měřte pro alespoň 7 různých vzdáleností *d* paty nakloněné roviny od průmětu výchozího místa do roviny podlahy, pro každou vzdálenost *d* měřte čas alespoň dvakrát.
3) Výsledky statisticky zpracujte a závislost znázorněte formou grafu.

Pomůcky: lišta s drážkou, kulička, posuvné měřidlo, stopky, svinovací metr, podložka

Teorie: Nejprve je třeba sestavit aparaturu dle níže uvedeného Obr. 1.



Legenda:

l… vzdálenost z výchozího bodu k patě nakloněné roviny (dále „délka nakloněné roviny“)

h… výška výchozího bodu nad podlahou

d… vzdálenost kolmého průmětu výchozího bodu do podlahy od paty nakloněné roviny

α… elevační úhel nakloněné roviny

Lištu s drážkou opřeme o libovolně zvolenou podložku (pro účely tohoto měření byla použita židle) a pětkrát změříme výšku výchozího bodu zvoleného nad hranou podložky od podlahy svinovacím metrem. Dbáme při tom na svislou polohu metru! Poté desetkrát pomocí posuvného měřidla provedeme měření průměru kuličky. V dalším kroku nastavíme aparaturu do cílové polohy a změříme délku nakloněné roviny *l* a vzdálenost paty nakloněné roviny od průmětu výchozího bodu do roviny podlahy *d*. Následně umístíme kuličku do výchozího bodu a současně se stisknutím stopek kuličku uvolníme. Jakmile kulička dosáhne konce nakloněné roviny, ukončíme měření opětovným stisknutím stopek a zapíšeme výsledek. Měření zopakujeme při stejném nastavení ještě jednou.

Pro další měření upravíme polohu nakloněné roviny – posuneme ji tak, abychom dostali hodnoty *l* a *d* odlišné od předchozích měření. Dbáme na to, abychom kuličku vypouštěli vždy ze stejného výchozího bodu vzhledem k podlaze (*h* musí zůstat zachováno). Při polohách opěrného bodu za těžištěm použité lišty se hodí druhý pár rukou, který může přidržet nakloněnou rovinu v potřebné poloze. Měření času pro nové nastavení opakujeme opět dvakrát, celkově měření opakujeme alespoň čtrnáctkrát, tedy pro sedm různých dvojic *l* a *d*.

Naměřené hodnoty pro průměr kuličky D poté statisticky zpracujeme, a to tak, že nejprve určíme střední hodnotu dle vzorce:

$$\overline{D} = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} D_i \text{, kde } D_i \text{ je } i\text{-tá naměřená hodnota.} \tag{1}$$

Následně určíme směrodatnou odchylku h dle vzorce:

$$\sigma_D = \sqrt{\frac{1}{10-1}\sum_{i=1}^{10}\left(D_i - \overline{D}\right)^2} \tag{2}$$

A relativní chybu dle vztahu:

$$\varphi_D = \frac{\sigma_D}{\overline{D}} \cdot 100\% \tag{3}$$

Analogický postup zopakujeme pro měření výšky výchozího bodu nad podlahou a určíme střední hodnotu, směrodatnou odchylku a relativní chybu.

V dalším kroku zpracujeme závislosti $t(\alpha)$, $l(t)$ a $t(l)$ formou grafu. Pro každou unikátní kombinaci *l*, *d*, *α* použijeme střední hodnotu vytvořenou ze dvou příslušných časových údajů jako aritmetický průměr. Předpokládejme, že kulička se pohybuje rovnoměrně zrychleným pohybem se zrychlením:

$$a = g\sin\alpha \text{, kde } g \text{ je tíhové zrychlení.} \tag{4}$$

Proto pro její dráhu v daném čase t musí platit následující:

$$s = \frac{at^2}{2} \Rightarrow s = \frac{(g\sin\alpha)t^2}{2} \tag{5}$$

Tuto dráhu pak pro získání času položíme do rovnosti s délkou nakloněné roviny a vyjádříme *t*:

$$l = \frac{(g\sin\alpha)t^2}{2} \Rightarrow 2l = (g\sin\alpha)t^2 \Rightarrow \frac{2l}{g\sin\alpha} = t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2l}{g\sin\alpha}} \tag{6}$$

Protože rozměry *l* a *d* se při změnách elevačního úhlu *α* mění, je třeba vyjádřit *l* pomocí α z elementární geometrické úvahy:

$$l = \frac{h}{\sin\alpha} \tag{7}$$

Pro závislost $t(\alpha)$ lze tedy psát:

$$t(\alpha) = \sqrt{\frac{2\frac{h}{\sin\alpha}}{g\sin\alpha}} \Rightarrow t(\alpha) = \sqrt{\frac{2h}{g\sin^2\alpha}} \text{, kde } h \text{ a } g \text{ jsou konstantní pro všechna měření.} \tag{8}$$

Ve vztahu (8) vytkneme sinus z odmocniny a dostáváme:

$$t(\alpha) = \frac{1}{\sin\alpha}\sqrt{\frac{2h}{g}} \tag{9}$$

Výraz v odmocnině je konstantní, takže očekáváme, že $t(\alpha) \sim \frac{\mathrm{c}}{\sin\alpha}$, kde *c* je konstanta. Výsledný graf by tedy měl mít průběh blízký hyperbole, protože pro malé α lze psát $\sin\alpha \approx \alpha$.

Pro závislost $l(t)$ vyjdeme opět ze vztahu pro dráhu rovnoměrně zrychleného pohybu a nahradíme dráhu délkou nakloněné roviny:

$$s = \frac{at^2}{2} \Rightarrow l = \frac{at^2}{2} \tag{10}$$

Zrychlení znovu nahradíme dle vztahu (4):

$$l = \frac{(g\sin\alpha)t^2}{2} \tag{11}$$

A protože hledáme závislost pouze na *t*, nahradíme sinus prostým poměrem:

$$l = \frac{\left(g\frac{h}{l}\right)t^2}{2} \Rightarrow l = \frac{ght^2}{2l} \tag{12}$$

Odtud vyjádříme l:

$$l = \frac{ght^2}{2l} \Rightarrow l^2 = \frac{ght^2}{2} \Rightarrow l = \sqrt{\frac{ght^2}{2}} \qquad (13)$$

Vytkněme ještě čas z odmocniny, o níž opět platí, že výraz v ní je konstantní:

$$l(t) = t\sqrt{\frac{gh}{2}} \qquad (14)$$

Díky (14) tedy předpokládáme závislost $l(t) \sim \mathrm{ct}$, kde c je konstanta, výsledkem by tedy měla být přímka.

Pro vyjádření závislosti $t(l)$ pak stačí vyjádřit t ze vztahu (14):

$$l = t\sqrt{\frac{gh}{2}} \Rightarrow \frac{l}{t} = \sqrt{\frac{gh}{2}} \Rightarrow \frac{t}{l} = \sqrt{\frac{2}{gh}} \Rightarrow t = l\sqrt{\frac{2}{gh}} \qquad (15)$$

Odtud můžeme psát:

$$t(l) = l\sqrt{\frac{2}{gh}} \qquad (16)$$

Výraz pod odmocninou je opět konstantní, takže můžeme psát: $t(l) \sim \mathrm{cl}$, kde c je konstanta. Výsledkem by tedy opět měla být přímka.

Výsledky:

Nejprve byl měřen průměr kuličky, tabulka Tab. 1 ukazuje naměřené hodnoty:

Tab. 1 – Naměřené hodnoty (průměr kuličky)

i	D [mm]
1	25,85
2	25,85
3	25,95
4	25,95
5	25,90
6	25,90
7	25,95
8	25,95
9	25,85
10	25,85

Z těchto hodnot byla určena dle (1) střední hodnota s výsledkem:

$$\overline{D} = 25{,}90\,mm$$

Následně byla určena směrodatná odchylka dle vztahu (2) s výsledkem:

$$\sigma_D = 0{,}04\,mm$$

Z té byla ještě určena relativní chyba s výsledkem:

$$\varphi_D = 0{,}2\,\%$$

Dále byla měřena výška výchozího bodu nad podlahou h, tabulka Tab. 2 ukazuje naměřené hodnoty:

Tab. 2 – Naměřené hodnoty (výška výchozího bodu nad podložkou)

i	h [cm]
1	47,0
2	46,0
3	46,5
4	46,0
5	46,0

Z těchto hodnot byla určena dle (1) střední hodnota s výsledkem:

$$\overline{h} = 46{,}3\,cm$$

Následně byla určena směrodatná odchylka dle vztahu (2) s výsledkem:

$$\sigma_h = 0{,}4\,cm$$

Z té byla ještě určena relativní chyba s výsledkem:

$$\varphi_h = 0{,}9\,\%$$

V další fázi měření byly zaznamenány časy sjezdu kuličky po nakloněné rovině pro dané hodnoty *l* a *d*. Naměřené a vypočtené hodnoty ukazuje Tab. 3:

Tab. 3 – Naměřené a vypočtené hodnoty (délka nakloněné roviny, vzdálenost paty, elevační úhel, čas)

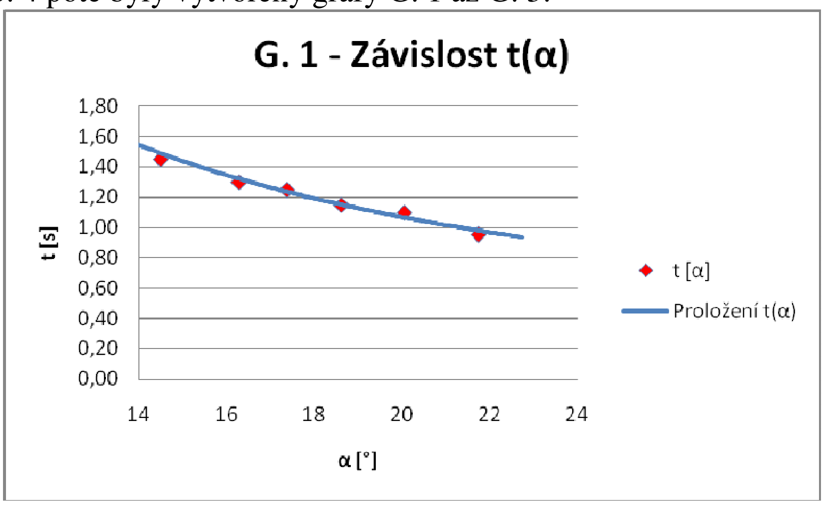
l [cm]	d [cm]	α [°]	t [s]
185	179	14	1,4
185	179	14	1,5
165	158	16	1,3
165	158	16	1,3
145	137	19	1,1
145	137	19	1,2
125	116	22	1,0
125	116	22	0,9
195	189	14	1,6
195	189	14	1,6
155	148	17	1,2
155	148	17	1,3
135	127	20	1,1
135	127	20	1,1

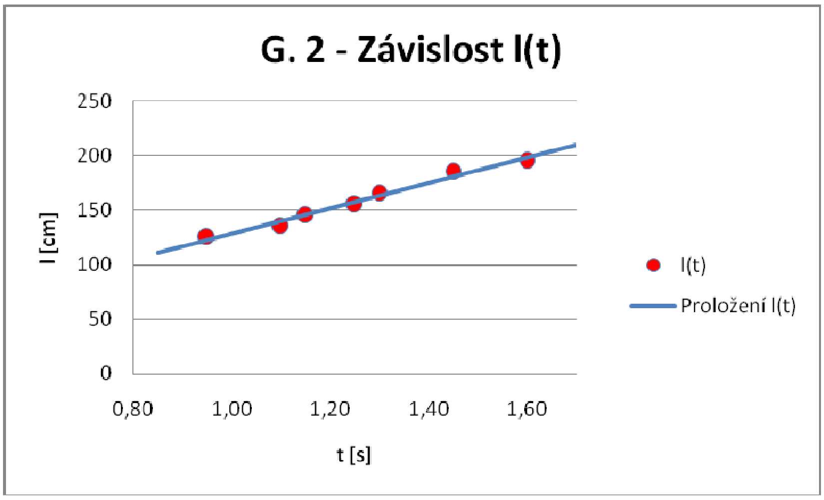
Z naměřené dvojice časových údajů byly vytvořeny pro každé *l* střední hodnoty. Výsledky ukazuje Tab. 4:

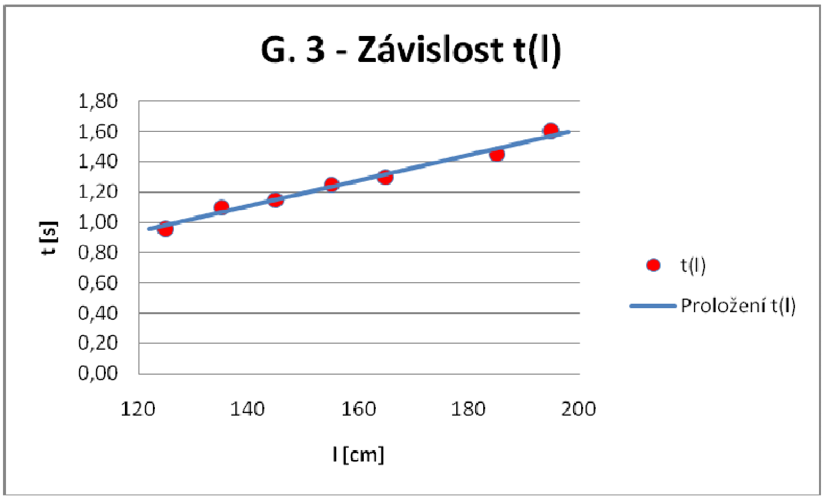
Tab. 4 – Naměřené a vypočtené hodnoty (závislosti i $t(\alpha)$, $l(t)$ a $t(l)$)

l [cm]	d [cm]	a [°]	t [s]
185	179	14	1,45
165	158	16	1,30
145	137	19	1,15
125	116	22	0,95
195	189	14	1,60
155	148	17	1,25
135	127	20	1,10

Z hodnot v Tab. 4 poté byly vytvořeny grafy G. 1 až G. 3:







Závěr:

Byl změřen průměr použité kuličky. Naměřené hodnoty ukazuje Tab. 1. Z naměřených hodnot byl určen průměr kuličky s výsledkem:

$\overline{D} = (25{,}90 \pm 0{,}04)mm$, což odpovídá relativní chybě $\varphi_D = 0{,}2\,\%$.

Byla změřena výška výchozího bodu nad podlahou. Výsledky ukazuje Tab. 2. Z naměřených hodnot byla určena výška výchozího bodu nad podlahou s výsledkem:

$\overline{h} = (46{,}3 \pm 0{,}4)cm$, což odpovídá relativní chybě $\varphi_h = 0{,}9\,\%$.

Byly změřeny závislosti $t(\alpha)$, $l(t)$ a $t(l)$, naměřené a vypočtené hodnoty ukazují Tab. 3 a Tab. 4.

Naměřené závislosti byly zpracovány graficky. Výsledky ukazují G. 1 až G. 3.

Diskuze:

Vzhledem k pouhým dvěma časovým údajům pro každou geometrii aparatury nemá příliš smysl zabývat se původem chyb měření, i když je zřejmé, že s přihlédnutím k lidské reakční době by přesnost mohlo vylepšit použití mnohem delší nakloněné roviny, která by prodloužila časy sjezdu, vůči kterým by potom relativní chyba byla umenšena.

I přes nízký počet měření a velmi krátký čas sjezdu kuličky však všechny změřené závislosti odpovídaly předpokládaným průběhům - závislosti $l(t)$ a $t(l)$ byly velmi dobře aproximovány přímkou a závislost $t(\alpha)$ velmi dobře reprezentuje hyperbola, jak je vidět na grafech G. 1 až G. 3. Prodloužení přímek v obou případech míří uspokojivě přesně k bodu [0;0], což odpovídá skutečnosti, že pro nulovou délku nakloněné roviny vyjde nulový čas sjezdu a naopak pro nulový čas sjezdu musí délka nakloněné roviny být nulová. U závislosti $t(\alpha)$ čas pro α přibližující se k nule roste k nekonečnu, což odpovídá skutečnosti, že kulička nikdy nedosáhne konce vodorovné lišty; naopak pro α blížící se k 90° by se křivka měla přibližovat k hodnotě 0,3 s, která odpovídá času volného pádu.